Funkcionalni redovi

Funkcionalni nizovi

Definicija Preslikavanje $f: \mathbb{N} \to X$ nazivamo nizom na skupu X.

Označavamo $f_n = f(n) \in X$, tj niz je dat sa $f_1, f_2, f_3, \dots$

Ako je $X = \mathbb{R}$ onda govorimo o brojnom realnom nizu.

Ako je X = skup funkcija onda govorimo o funkcionalnom nizu

$$X = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid U \subseteq \mathbb{R},\ f\text{ - funkcija} \}$$

Primjer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

Imamo niz fja $x, x^2, x^3, \dots$

Za konkretnu tačku $x = x_0$ funkcionalni niz postaje brojni niz i on može biti konvergentan ili divergentan.

Na primjer, za $x_0 = \frac{1}{2}$ niz $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ je konvergentan niz.

Definicija Skup D_f svih vrijednosti x za koje funkcionalni niz $f_n(x)$ konvergira nazivamo oblast konvergencije tog funkcionalnog niza, tj ako

$$(\forall x_0 \in D_f)(\exists y_0 \in \mathbb{R}) \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = y_0$$

~~Ako je sad x_0~~ Uzmimo da je $y_0 = f(x_0)$ tj Neka fja $f: x_0 \to y_0 = f(x_0)$ tj važi je za svako $x \in D_f$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kažemo da funkcionalni niz $\{f_n(x)\}$ konvergira za svako x ka funkciji $f(x)$. Očigledno je da $f: D_f \to \mathbb{R}$

Pišemo $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Jezikom kvantifikatora

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x_0 \in D_f)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Primjer $f_n(x) = x^n$ $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x = 0 \quad f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 0 < x < 1 \quad f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_1 = 1 \quad f_n(1) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Definicija Kažemo da niz fja $\{f_n(x)\}$ ravnomjerno konvergira na skupu D k fji $f(x)$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svako $x \in D$ i svako $n \in \mathbb{N}$, takvo da $n \geq N$ važi da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ i ~~pei~~ pišemo $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$.

Broj $N = N(\varepsilon)$.

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Teorema Niz $\{f_n(x)\}$ ravnomjerno konvergira na D ka funkciji $f(x)$ ako i samo ako $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Dokaz. Označimo sa $w_n = \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$

Treba da pokažemo da $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$.

$(\Rightarrow)$ Neka $w_n \to 0$, $n \to \infty$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. To znači da $\exists N \in \mathbb{N}$ tako da $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow |w_n - 0| < \varepsilon)$ tj

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |w_n| < \varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall x \in D)\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ tj}$$

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in D)\ (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \text{ tj } f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$$

$(\Leftarrow)$ Neka $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, kad $n \to \infty$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano.

Uzmimo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Iz $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow$

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \text{ tj}$$

$$(\forall x \in D)\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1 \Rightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq w_n < \varepsilon \Rightarrow |w_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow w_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Napomena Iz ravnomjerne konvergencije $\{f_n(x)\}$ slijedi konvergencija u svakoj tački x tj $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$.

<u>Teorema</u> Neka je $\{f_n(x)\}$ niz neprekidnih fja i neka na skupu D $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Tada je i $f(x)$ neprekidna fja na D.

<u>Dokaz.</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. tj

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. Uzmimo za $\varepsilon_1 = \varepsilon/3 > 0$.
Pošto su $\{f_n(x)\}$ neprekidne fje za svako $n \in \mathbb{N}$ slijedi da

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon_1)$$

Iz ravnomjerne neprekidnosti slijedi da

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1)$$

Odavde imamo da ~~je~~ ako je

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| <$$

(rav. konv. / nepr. $f_n(x)$ / ravnj. konv)

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$ tj $f(x)$ neprekidna u x_0. ◭

<u>Funkcionalni redovi</u>

Neka je $\{u_n(x)\}$ funkcionalni niz. Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ kod koga su članovi funkcije od x se naziva funkcionalnim redom.
Sa $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ označimo parcijalnu sumu reda.
Skup svih x za koje funkcionalni red konvergira nazivamo oblast konvergencije reda.

<u>Definicija</u> Ako postoji $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$ onda kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira ka $S(x)$ i pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$.
Ako $S_n(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} S(x)$ onda kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka $S(x)$.

Primjer Razmotrimo funkcionalni red $\sum_{n=1} x^{n-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$

ovaj red konvergira za sve vrijednosti $x \in (-1,1)$ tj. za sve x za koje je $|x|<1$.

ovaj red definiše fju

Kada je $|x|<1$ tada je $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ tj. $S(x) = \frac{1}{1-x}$ na $(-1,1)$ tj.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots \quad \blacktriangle$$

Kao i kod brojnih redova $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, gdje je

$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$. – ostatak reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Za svako $x \in D$, ako je red $\sum u_n(x)$ konvergentan imamo da je $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, pa je ~~za~~ svako $x \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$$ tj. ostatak konvergentnog reda teži ka nuli kad $n \to \infty$.

Teorema (Košijev test) Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka $S(x)$ na skupu D ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takvo da za svako $x \in D$ i svako $n, p \in \mathbb{N}$ važi da ~~ako je~~ $(n \geq N \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Teorema (Vajerštras) Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka $S(x)$ na skupu D ako postoji konvergentan brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takav da za svako $n \in \mathbb{N}$, svako $x \in D$ važi $|u_n(x)| \leq a_n$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Znamo da je $|u_n(x)| \leq a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svako $x \in D$.

Neka su $n, p \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n = |S^a_{n+p} - S^a_n| < \varepsilon$$

jer je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red. Slijedi red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ $\blacktriangle$

Primjer Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum^{\infty} \cos nx$ ravnomjerno konv. red..

Teorema (Abel)

Neka ~~je~~:

1) red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka f-ji $A(x)$ na skupu D
2) $b_n(x)$ monoton i ograničen niz na D

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ ravnomjerno konvergentan na skupu D.

Teorema (Dirihle) Neka važi

1) $S_n^a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ ograničena na D
2) $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$
3) $b_n(x)$ je monoton funkcionalni niz.

Tada ~~je~~ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Osobine funkcionalnih redova

Teorema ~~Zbir~~ Suma ravnomjerno konvergentnog reda neprekidnih funkcija je neprekidna f-ja.

Dokaz. Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ravnomjerno konvergira na D ka $S(x)$ i $u_n(x)$ neprekidne na D f-je za svako $n \in \mathbb{N}$. Iz ravnomjerne neprekidnosti slijedi da niz $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $n\to\infty$ i $S_n(x)$ su neprekidne f-je. Po jednoj od teorema za funkcionalne nizove $\Rightarrow$ $S(x)$ neprekidna f-ja.

~~Teorema~~

Primjer Razmotrimo red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{1/2n-1} \right)$

~~ova~~ Članovi ovog reda su neprekidne f-je za sve vrijednosti x. Pokažimo da ovaj red konvergira i da je njegova suma prekidna f-ja. $S_n(x) = x^{1/2n+1} - x$

Ako je $x > 0$ $\quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x \right) = 1 - x$

$x < 0$ $\quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-|x|^{1/2n+1} - x \right) = -1 - x$

$x = 0$ $\quad S_n(x) = 0 \Rightarrow S(x) = 0$

Znači $S(x) = \begin{cases} -1-x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$ pa fja je prekidna.

Odavde vidimo da naš red ne možemo majorizirati ni sa jednim brojnim redom na bilo kom intervalu koji sadrži $\underline{x=0}$.

<u>Teorema</u> Neka su $u_n(x)$ neprekidne fje ~~na D~~ i neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ravnomjerno konvergentan na intervalu $[a,b]$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{x} u_n(t)dt \right)$ ravnomjerno konvergira za svako $\alpha, x \in [a,b]$ i važi da je

$$\int_{\alpha}^{x} S(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n(t)dt$$

<u>Teorema</u> Neka su $u_n(x)$ neprekidno diferencijabilne fje na intervalu $[a,b]$. Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira bar u jednoj tački $x_0 \in [a,b]$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ konvergira na $[a,b]$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira na $[a,b]$ i možemo ga diferencirati član po član tj $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Stepeni redovi

Definicija Stepenim redom nazivamo funkcionalni red oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, gdje su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ realne konstante, koje nazivamo koeficijentima stepenog reda.

U slučaju $x_0=0$ dobijamo red oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Uočimo da kada kod prvog reda uvedemo smjenu $x-x_0=X$ dobijamo red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, tako da je dovoljno ispitati konvergenciju ~~reda~~ posljednjeg reda (kad je $x_0=0$). Razmatraćemo redove $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teorema 1 (Abelova teorema)

1) Ako stepeni red ~~konvergira~~ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, to on apsolutno konvergira za sve vrijednosti x za koje je $|x|<|x_0|$.

2) Ako red divergira za neko x_0', onda on divergira za svako x za koje je $|x|>|x_0'|$.

Dokaz. 1) Pošto red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira to njegov opšti član $a_n x_0^n \to 0$, $n\to\infty$ (za $x=x_0$). To znači da postoji $M>0$ tako da su svi članovi reda po apsolutnoj vrijednosti manji od M tj.

$$(\exists M>0)\ (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n x_0^n|<M.$$

~~Pošto~~ Uzmimo sve x za koje je $|x|<|x_0|$. Tada imamo da je

$$\left|a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| < |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \quad \left(\left|\frac{x}{x_0}\right|<1\right) \Rightarrow$$

Odnosno,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|} = M \cdot \frac{|x_0|}{|x_0|-|x|}$$ ovaj red konvergira.

Pošto je ovo majorirajući red $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergira.

2) slično kao 1)

Teorema 2 Stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima oblast konvergencije interval s centrom u koordinatnom početku, tj interval oblika $(-R,R)$, a tačke $-R$ i R eventualno mogu biti uključene.

R nazivamo poluprečnikom konvergencije stepenog reda.

Na krajevima intervala $x=R$ ili $x=-R$ pitanje konvergencije odnosno divergencije reda se rešava individualno za svaki konkretni red.

Postavlja se pitanje kako se računa R.

Razmotrimo red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Uzmimo red koji je sastavljen od apsolutnih veličina $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Primijenimo na ovaj red Dalamberov kriterijum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = l|x|$$

Ako je $l|x|<1$ tj $|x|<\frac{1}{l}$ red konvergira, a ako je $l|x|>1$ tj $|x|>\frac{1}{l}$ red divergira.

Znači interval $(-R,R)=\left(-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right)$ je interval konvergencije stepenog reda tj $R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Analogno možemo primijeniti Košijev kriterijum i tada je

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$$

Znači,

$$R = \begin{cases} 0, & l=+\infty \\ \frac{1}{l}, & 0<l<+\infty \\ +\infty, & l=0 \end{cases} \qquad l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \text{ ili } l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ ako postoji}$$

Primjer 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$, $l=1 \Rightarrow$ $|x|<1$ konv, $|x|>1$ diverg.

Za $x=1$ i $x=-1$ ovaj red divergira.

$x=1$ $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \Rightarrow S_n = n \to +\infty$ $n\to\infty$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergira.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left|\frac{n}{n+1}\right| = 2$ $l=2$

Red konv za $|x|<\frac{1}{2}$, divergira za $|x|>\frac{1}{2}$. $x=\frac{1}{2}$ red divergira, $x=-\frac{1}{2}$ red konvergira.

Furjeovi redovi

Definicije i postavka zadatka

Definicija Funkcionalni red oblika $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ se naziva trigonometrijskim redom, a konstantni brojevi a_n i b_n koeficijentima trigonometrijskog reda, $(n=1,2,\dots)$

Ako trigonometrijski red konvergira njegova suma je periodična fja $f(x)$ s periodom 2π pošto su $\sin nx$ i $\cos nx$ periodične fje s periodom 2π. Isto naravno važi i za parcijalne sume tog reda. Znači, $f(x)=f(x+2\pi)$.

Postavlja se sljedeće pitanje: Data je fja $f(x)$ periodična s periodom 2π. Pri kojim uslovima na $f(x)$ je moguće naći trigonometrijski red koji konvergira k datoj fji?

Definicija koeficijenata trigonometrijskog reda po Furjeovim formulama

Neka je $f(x)$ periodična fja sa periodom 2π, takva da se ona predstavlja trigonometrijskim redom koji konvergira na intervalu $(-\pi,\pi)$ fji

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1)$$

Pretpostavimo da je red sa desne strane ravnomjerno konvergentan. Tada je integral lijeve strane jednak sumi integrala s desne strane u (1). Prointegrirajmo obe strane po x od $-\pi$ do π. Tada imamo da je

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,dx\right)$$

Izračunajmo svaki od integrala s desne strane:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=\pi a_0;\quad \int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,dx=a_n\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,dx=-b_n\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

Slijedi $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi a_0 \Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$ (2)

Koristeći integrale trigonometrijskih fja, koje nećemo navoditi ovdje dobija se da je

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \quad (3)$$

Koeficijente (2), (3) nazivamo Furijeovim koeficijentima fje f(x), a trigonometrijski red (1) s takvim koeficijentima nazivamo Furijeovim redom fje f(x).

Dakle važi sljedeće:

<u>Teorema</u> Neka trigonometrijski red $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ravnomjerno konvergira na intervalu $(-\pi,\pi)$ ka fji $f(x)$ tj $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Tada je to razlaganje jedinstveno pri čemu važe formule (2) i (3).

Znači svaki ravnomjerno konvergentan trigonometrijski red je Furijeov red sa koeficijentima (2) i (3).

Vraćamo se sada na početak našeg problema, tačnije na pitanje kakve uslove treba zadovoljavati fja $f(x)$ da bi njen Furijeov red konvergirao i da bi suma Furijeovog reda bila jednaka vrijednostima date fje u odgovarajućim tačkama.

<u>Definicija</u> Ograničena funkcija $f(x)$ zadovoljava Dirihleove uslove na intervalu $[a,b]$, ako se taj interval može ~~razbiti~~ podijeliti na konačno mnogo podintervala $(a,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_{n-1},b)$ tako da je funkcija na svakom od tih intervala monotona (ili rastuća ili opadajuća), a na krajevima tih podintervala može imati samo prekid prve vrste. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je dio po dio monotona na $[a,b]$.

<u>Teorema</u> Ako periodična funkcija $f(x)$ sa periodom 2π zadovoljava Dirihleove uslove na intervalu $[-\pi,\pi]$, tada se funkcija može predstaviti u obliku Furijeovog reda koji konvergira u svim tačkama intervala. Suma dobijenog reda $S(x)$ je jednaka vrijednosti fje $f(x)$ u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$. U tačkama prekida fje $f(x)$ suma reda je jednaka ~~srednjoj~~ aritmetičkoj sredini lijeve i desne granične

ako je $x=c$ tačka prekida f-je $f(x)$ tada je

$$S(x)\big|_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to c-0} f(x) + \lim_{x\to c+0} f(x)\right].$$

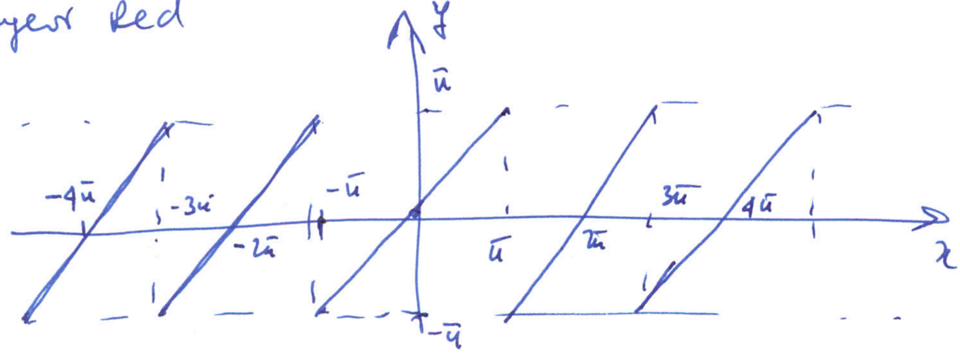
Takođe je $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right]$.

Primjeri razlaganja funkcije u Furijeov red

Primjer 1. Neka je $f(x)$ periodična f-ja s periodom 2π definisana

$$f(x)=x, \quad -\pi\le x<\pi$$

$f(x)$ je dio po dio monotona i ograničena. Znači možemo da je razložimo u Furijeov red



Po formulama (2) i (3) imamo da je:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$

Odavde je

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \dots\right]$$

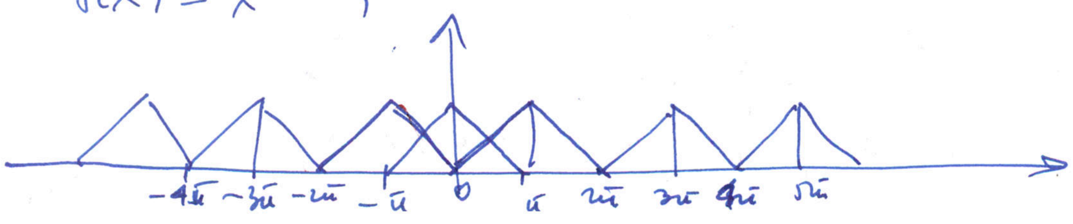
ovo važi u svim tačkama osim u tačk. prekida.

U tačkama prekida je ~~vrijednost~~ suma reda jednaka nuli.

Primjer 2 $f(x)$ s periodom 2π

$$f(x) = -x, \quad -\pi\le x\le 0$$
$$f(x) = x, \quad 0< x\le \pi$$

tj. $f(x)=|x|$



F-ja je dio po dio monotona i ograničena na $-\pi \le x \le \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & k \text{ parno} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ neparno} \end{cases}$$

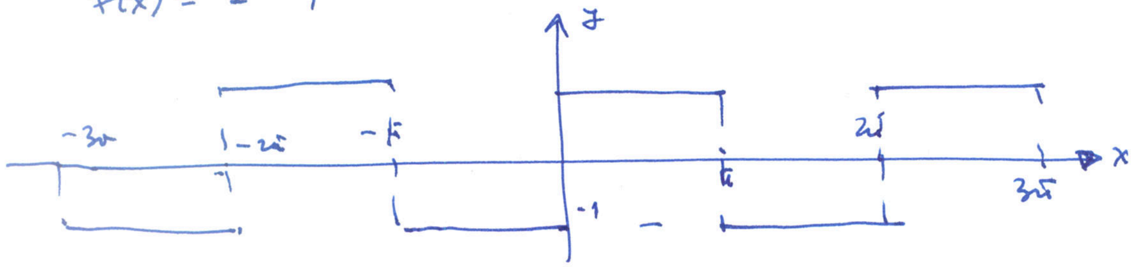
$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx\right] = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots\right]$$

Ovaj red konvergira u svim tačkama i njena suma je jednaka datoj funkciji.

Primjer 3 $f(x)$ periodična s periodom 2π

$$f(x) = -1, \quad -\pi < x < 0$$
$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi$$



$f(x)$ monotona dio po dio i ograničena na $-\pi \le x \le \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}(1 - \cos \pi k) = \begin{cases} 0, & k \text{ parno} \\ \frac{4}{\pi k}, & k \text{ neparno} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots\right]$$

Osim u tačkama prekida
u nuli je $= 0$

Razlaganje periodičnih f-ja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx$$, ako je $\psi(x)$ periodična f-ja s periodom 2π.

λ ma koji broj.

Iz ovoga slijedi da je $(-\pi,\pi)$ možemo zamjeniti intervalom $(\lambda, \lambda+2\pi)$ tj

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

λ bilo koji broj.

Razlaganje parnih i neparnih f-ja

Ako je ψ - parna f-ja tada je $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi}\psi(x)\,dx$

$$\underline{\psi(x) = \psi(-x)}$$

Ako je ψ - neparna f-ja tada je

$$\psi(-x) = -\psi(x) \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx = 0$$

1) Ako je $f(x)$ ~~pa~~ neparna f-ja $f(x)\cos kx$ - takođe neparna f-ja, a $f(x)\sin kx$ parna f-ja pa je

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx}$$

tj Furijeov red sadrži samo sinuse

2) Ako je $f(x)$ parna f-ja, to je $f(x)\sin kx$ - neparna, a $f(x)\cos kx$ parna f-ja pa je

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0$$

tj Furijeov red sadrži samo kosinuse. $\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.}$

Primjer $f(x) = x \quad [-\pi, \pi]$

$f(x)$ neparna f-ja $\quad a_0 = 0, \ a_k = 0 \quad b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} + \dots\right] = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n+1}\dots\right]$$

Furijeov red za f-je s periodom $2l$

Neka je $f(x)$ periodična f-ja s periodom $2l$ $(\neq 2\pi)$.

Uvedimo smjenu $x = \frac{lt}{\pi}$

Tada je f-ja $f(\frac{lt}{\pi})$ f-ja promjenljive t s periodom 2π i razlaže se u Furijeov red na intervalu $-\pi \le x < \pi$.

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\, dt$$

Vratimo se na promjenljivu x:

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = x\frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx$$

Pa imamo da je

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

i red je oblika $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right)$

Ako je f-ja $f(x)$ zadata na intervalu $[a, b]$,

Uzmemo $\underline{b-a=2l}$, $\underline{a+2l=b}$ pa imamo da je

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx$$

$$b_n = \int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx$$

i Furijeov red je jednak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right]$$